

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ – 3 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1^η ΕΡΩΤΗΣΗ

Ένας μαθητής της Δ΄ Γυμνασίου του πρακτικού τμήματος στη δεκαετία του '70 δεν έχει γεωμετρικά όργανα και στο αιφνίδιο διαγώνισμα Γεωμετρίας χρειάζεται να σχεδιάσει κύκλους διαφορετικών ακτίνων. Για καλή του τύχη στα κέρματα που έχει μαζί του υπάρχουν και δύο δεκάρες (για τους νεώτερους: 1 δεκάρα = $\frac{1}{10}$ της δραχμής). Κρατάει



ακίνητη τη μία δεκάρα κέντρου K_1 και θέτει τη μύτη ενός στυλό στη μικρή οπή που έχει στο κέντρο του το άλλο μικρής αξίας –αλλά πολύτιμο για την περίπτωση– νόμισμα, η δεκάρα κέντρου K_2 .

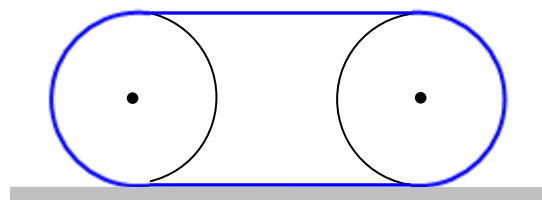
Μετατοπίζει με τη βοήθεια του στυλό τη δεκάρα κέντρου K_2 έτσι ώστε αυτή να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρεια της πρώτης ακίνητης δεκάρας κέντρου K_1 . Θεωρούμε ότι η μύτη του στυλό διαγράφει την περιφέρεια κύκλου που αντιστοιχεί στις διαδοχικές θέσεις του κέντρου K_2 της κινούμενης δεκάρας. Όταν η κινούμενη δεκάρα θα έχει εκτελέσει N_1 περιστροφές γύρω από το κέντρο K_1 της ακίνητης δεκάρας, οι περιστροφές N_2 που θα έχει εκτελέσει γύρω από άξονα κάθετο σ' αυτήν που διέρχεται το κέντρο της K_2 θα είναι:

A₁. α. $N_2 = N_1$ β. $N_2 = 2 N_1$ γ. $N_2 = \frac{1}{2} N_1$

A₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2^η ΕΡΩΤΗΣΗ

Δύο όμοιοι τροχοί ακτίνας R έχουν τυλιγμένο στην περιφέρειά τους ομογενή και ισοπαχή ιμάντα μικρού πάχους μάζας m . Το σύστημα τροχοί – ιμάντας βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Οι τροχοί κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν με ταχύτητα μέτρου u . Αν η ροπή αδρανείας σώματος μάζας m που έχει τη μορφή περιφέρειας κύκλου μικρού πάχους ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο προς αυτό που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι $I = mR^2$, η κινητική ενέργεια του ιμάντα είναι :

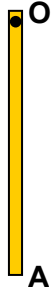


B₁. α. $K = \frac{1}{2} mu^2$ β. $K = 2 mu^2$ γ. $K = mu^2$

B₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3^η ΕΡΩΤΗΣΗ

Ομογενής ράβδος OA μάζας m και μήκους ℓ μπορεί να στρέφεται περί το σταθερό άκρο της O. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση. Η ράβδος στρέφεται και φθάνει στην οριζόντια θέση. Για τη μετατόπιση αυτή το έργο W_{τ_W} της ροπής της δύναμης του βάρους είναι:



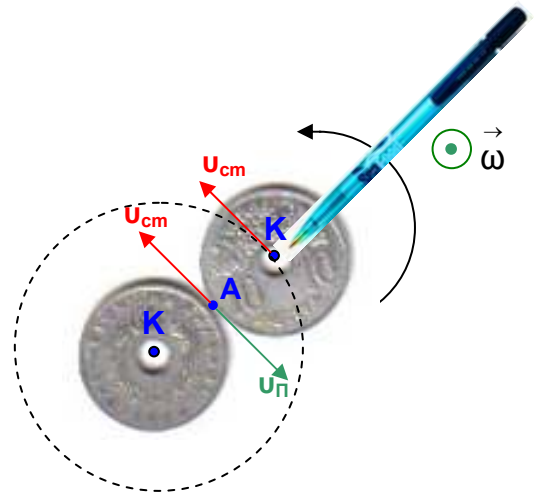
Γ₁. α. $W_{\tau_W} = -mg \frac{\ell}{2}$ β. $W_{\tau_W} = -mg \ell$ γ. $W_{\tau_W} = 0$

Γ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A₁. β

A₂. Η δεκάρα κέντρου K_2 κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρεια της δεκάρας κέντρου K_1 , άρα για την ταχύτητα του εκάστοτε σημείου επαφής A της κυλιόμενης δεκάρας με την ακίνητη ισχύει $u_A=0$ και για τα μέτρα των ταχυτήτων έχουμε: $u_{cm} = u_{\pi}$ (1) όπου u_{cm} = το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της κυλιόμενης δεκάρας και u_{π} = το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας της κυλιόμενης δεκάρας λόγω της στροφικής της κίνησης. Από την (1):

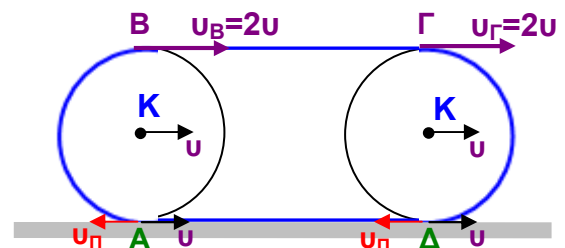


$\frac{\hat{s}_{\mu}}{t} = \frac{\hat{s}_{\pi}}{t}$ όπου \hat{s}_{μ} = το τόξο που διανύει το κέντρο K_2 σε χρόνο t , λόγω της μεταφορικής του κίνησης η οποία είναι κυκλική ακτίνας $2R$

και \hat{s}_{π} = το τόξο που διανύει το εκάστοτε σημείο επαφής A της κυλιόμενης δεκάρας με την ακίνητη δεκάρα στον ίδιο χρόνο t . Άρα $\hat{s}_{\mu} = \hat{s}_{\pi}$ (2). Από (2) $\Rightarrow N_1 2\pi 2R = N_2 2\pi R \Rightarrow N_2 = 2N_1$.

B₁. γ

B₂. Επειδή οι τροχοί κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν με ταχύτητα μέτρου u , η γραμμική ταχύτητα των σημείων των περιφερειών τους λόγω της στροφικής τους κίνησης u_{π} έχει το ίδιο μέτρο με την ταχύτητα u των κέντρων μάζας τους δηλαδή $u_{\pi}=u$. Για τα σημεία τους A και Δ ισχύει $u_A=u_{\Delta}=0$ (1). Αντίστοιχα για τα ανώτερα σημεία τους B και Γ ισχύει $u_B = u_{\Gamma} = 2u$ (2).



Επειδή ο ιμάντας είναι ομογενής λόγω συμμετρίας ισχύει ότι $m_{AB}=m_{\Gamma\Delta}$ (1) και $m_{B\Gamma}=m_{\Delta A}$ (2) όπου: $m_{AB}, m_{B\Gamma}, m_{\Gamma\Delta}$ και $m_{\Delta A}$ οι μάζες των τμημάτων AB, BΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα του ιμάντα.

Το τμήμα AB του ιμάντα εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση και έχει κινητική ενέργεια :

$$K_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} u^2 + \frac{1}{2} I_{AB} \omega^2 \Rightarrow K_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} u^2 + \frac{1}{2} m_{AB} R^2 \omega^2 \Rightarrow K_{AB} = m_{AB} u^2 \quad (3) \text{ διότι για το μέτρο}$$

της γραμμικής ταχύτητας u_{π} των σημείων του ιμάντα που λόγω της επαφής τους με τους τροχούς συμμετέχουν στην περιστροφική κίνηση των τροχών, ισχύει $u_{\pi} = \omega R = u$.

Αντίστοιχα λόγω συμμετρίας το τμήμα ΔΑ έχει κινητική ενέργεια $K_{\Gamma\Delta} = m_{\Gamma\Delta} u^2$ (4)

Το τμήμα ΔΑ είναι ακίνητο λόγω της (1), άρα $K_{\Delta A} = 0$ (5)

Το τμήμα BΓ εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση και έχει κινητική ενέργεια

$$K_{B\Gamma} = \frac{1}{2} m_{B\Gamma} (2u)^2 \Rightarrow K_{B\Gamma} = 2m_{B\Gamma} u^2 \quad (6)$$

Η ολική κινητική ενέργεια του ιμάντα είναι $K = K_{AB} + K_{B\Gamma} + K_{\Gamma\Delta} + K_{\Delta A} \xrightarrow{(3),(4)} \xrightarrow{(5),(6)}$

$$K = (m_{AB} + 2m_{B\Gamma} + m_{\Gamma\Delta}) u^2 \xrightarrow{(2)} K = (m_{AB} + m_{B\Gamma} + m_{\Gamma\Delta} + m_{\Delta A}) u^2 \Rightarrow K = m u^2.$$

*Το θέμα αυτό αποτελεί τροποποίηση παλαιότερου θέματος που έχει τεθεί στον Πανελλήνιο Διαγωνισμό Φυσικής 1995.

Γ₁. α

Γ₂.

1^{ος} Τρόπος

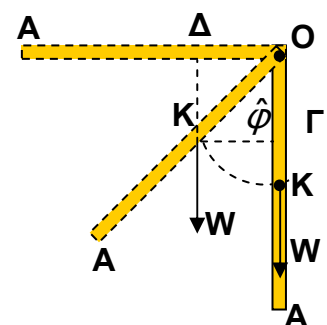
Η ροπή του βάρους τ_W σε τυχαία θέση που η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία $\hat{\phi}$ σε σχέση με την αρχική της κατακόρυφη διεύθυνση,

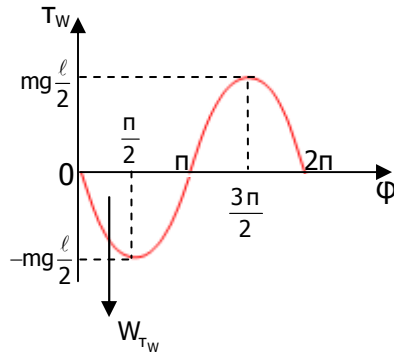
$$\text{είναι } \tau_W = mg(O\Delta) \Rightarrow \tau_W = mg(K\Gamma) \Rightarrow \tau_W = mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \hat{\phi}, \text{ δηλαδή}$$

πρόκειται για ροπή μεταβλητού μέτρου (ημιτονοειδούς μορφής). Το στοιχειώδες έργο της ροπής του βάρους για στροφή της ράβδου

$$\text{κατά } d\phi \text{ είναι } dW_{\tau_W} = - mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \hat{\phi} d\phi \text{ όπου το πρόσημο (-) οφείλεται}$$

στο ότι η δύναμη του βάρους αντιτίθεται στην στροφική κίνηση της ράβδου για γωνίες περιστροφής $\hat{\phi}$ από 0 έως π ($0 < \hat{\phi} < \pi$). Το έργο της ροπής του βάρους υπολογίζεται ως το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της ημιτονοειδούς καμπύλης και του άξονα <<των ϕ >> με υπολογισμό του αντίστοιχου ορισμένου ολοκληρώματος:





$$W_{\tau_W} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \phi \, d\phi \Rightarrow W_{\tau_W} = -mg \frac{\ell}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu \phi \, d\phi \Rightarrow W_{\tau_W} = -mg \frac{\ell}{2} [-\sigma \nu \phi]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow W_{\tau_W} = -mg \frac{\ell}{2}$$

2^{ος} Τρόπος

Το έργο της ροπής του βάρους W_{τ_W} κατά τη στροφική κίνηση της ράβδου είναι το έργο της δύναμης του βάρους W_W . Η δύναμη του βάρους W είναι δύναμη σταθερής κατεύθυνσης και μέτρου και μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της σε καμπύλη τροχιά. Αποδεικνύεται ότι το μέτρο του έργου μίας δύναμης με αυτά τα χαρακτηριστικά ισούται: **με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης και της προβολής της καμπύλης τροχιάς πάνω στη διεύθυνση του φορέα της δύναμης**. Το πρόσημο της αριθμητικής τιμής του έργου είναι αντίστοιχα θετικό ή αρνητικό όταν η δύναμη έχει τη φορά της κίνησης του σώματος στο οποίο ασκείται η δύναμη ή αντιτίθεται σ' αυτήν. Η σχετική απόδειξη υπάρχει στην ανάρτηση του Δ.Μάργαρη **Έργο μιας μη σταθερής ροπής**.

$$\text{Άρα } W_{\tau_W} = W_W = -mg(KO) \Rightarrow W_{\tau_W} = -mg \frac{\ell}{2}$$

3^{ος} Τρόπος

Το έργο της ροπής του βάρους W_{τ_W} κατά τη στροφική κίνηση της ράβδου είναι το έργο της δύναμης του βάρους W_W . Το βάρος W όμως είναι μία συντηρητική δύναμη και το έργο της δίνεται εξ ορισμού από τη σχέση $W_W = U_{APX} - U_{TEΛ}$ (1). Ορίζουμε ως επίπεδο αναφοράς για τη μέτρηση της Δυναμικής Ενέργειας βαρυτικού πεδίου το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση K του κέντρου μάζας της ράβδου στην αρχική της (κατακόρυφη) θέση, άρα $U_{APX} = 0$ και από τη σχέση (1): $W_W = -mg \frac{\ell}{2}$.

Σχόλιο

Οι τρεις τρόποι παρατίθενται για να καταδειχθεί ότι στην περίπτωση που η δύναμη της οποίας ζητείται το έργο της ροπής της είναι συντηρητική, προτιμάται προφανώς ο **3^{ος} Τρόπος**, ακόμα και σε εφαρμογές του Θεωρήματος Έργου- Ενέργειας σε στροφική κίνηση όπου αν και αναφερόμαστε σε έργα ροπών δυνάμεων, στις συντηρητικές δυνάμεις η διαδικασία απλοποιείται με εφαρμογή του ορισμού του έργου συντηρητικής δύναμης. Αν η δύναμη **ΔΕΝ** είναι συντηρητική, μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της σε καμπύλη τροχιά και η ροπή της είναι μεταβλητού μέτρου, κατ' ανάγκη χρησιμοποιούμε το **2^ο Τρόπο**.

Ο **1^{ος} Τρόπος** είναι η γενίκευση και χρησιμοποιείται όταν το μέτρο της ροπής της δύναμης δεν είναι σταθερό είτε επειδή η δύναμη είναι μεταβλητού μέτρου είτε επειδή μεταβάλλεται ο μοχλοβραχίονάς της. Αν το μέτρο της ροπής είναι γραμμική συνάρτηση της γωνίας: $\tau = \alpha \hat{\varphi} + \beta$ (π.χ. μια τέτοια ροπή προκύπτει από δύναμη F με μέτρο $F = 10\pi - 20\varphi$ (S.I) όπου $\varphi =$ η γωνία στροφής του σώματος, που είναι διαρκώς κάθετη σε κάποιο σημείο στρεφόμενης ράβδου, άρα έχει σταθερό μοχλοβραχίονα) όπου α και β σταθερές τότε ο υπολογισμός του έργου της ροπής γίνεται εύκολα με υπολογισμό του εμβαδού του αντίστοιχου χωρίου.

Ξ.ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ