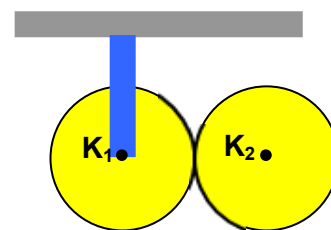


ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ & ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΡΟΧΑΛΙΑΣ

Οι δύο όμοιες ομογενείς τροχαλίες του σχήματος έχουν ακτίνα $R=0,08\text{m}$, μάζα $M=8\text{kg}$ και είναι συνδεδεμένες με νήμα αμελητέας μάζας που είναι τυλιγμένο στις περιφέρειες τους. Η μία τροχαλία έχει σταθερό το κέντρο μάζας της K_1 . Η άλλη είναι αρχικά ακίνητη και το κέντρο μάζας της K_2 είναι στο ίδιο ύψος με αυτό της σταθερής τροχαλίας. Οι δύο τροχαλίες μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους K_1 και K_2 και είναι κάθετοι σε αυτές. Αφήνουμε κάποια στιγμή ελεύθερη την τροχαλία κέντρου μάζας K_2 . Κατά την διάρκεια της πτώσης της το νήμα ξετυλίγεται και από τις δύο τροχαλίες χωρίς να ολισθαίνει σ' αυτές παραμένοντας διαρκώς κατακόρυφο και αυτές στρέφονται με την ίδια φορά.



- α.** Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας K_2 με τα μέτρα των επιτρόχιων ταχυτήτων των σημείων Α και Γ των δύο τροχαλιών.
- β.** Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας K_2 με τα μέτρα των επιτρόχιων επιταχύνσεων των σημείων Α και Γ των δύο τροχαλιών.
- γ.** Να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων $a_{\gamma\omega_1}$ και $a_{\gamma\omega_2}$ των δύο τροχαλιών.
- δ.** Να υπολογιστεί το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας K_2 , a_{cm} .
- ε.** Την δύναμη που ασκεί το νήμα(τάση) στις τροχαλίες.

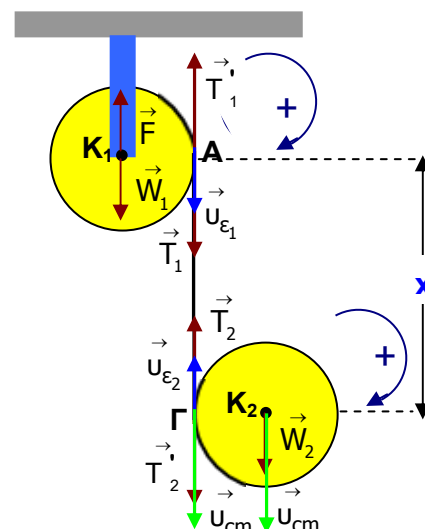
Δίνονται οι ροπές αδρανείας των δύο τροχαλιών ως προς τους άξονες περιστροφής τους

$$I_{(K_1)} = I_{(K_2)} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ και } g=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α.1^{ος} Τρόπος

Αν u_{cm} =το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της τροχαλίας κέντρου μάζας K_2 λόγω της μεταφορικής κίνησης, u_{ϵ_1} = το μέτρο της γραμμικής (επιτρόχιας) ταχύτητας του σημείου Α και u_{ϵ_2} = το μέτρο της γραμμικής (επιτρόχιας) ταχύτητας του σημείου Γ λόγω των στροφικών κινήσεων των τροχαλιών όταν από τις δύο τροχαλίες έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους x , το κέντρο μάζας K_2 της ελεύθερης τροχαλίας έχει αντίστοιχα



μετακινηθεί λόγω της μεταφορικής κίνησής της κατά x και οι δύο τροχαλίες έχουν διαγράψει λόγω της

περιστροφικής τους κίνησης τόξα \widehat{s}_1 και \widehat{s}_2 . Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στις

$$\text{τροχαλίες ισχύει: } x = \widehat{s}_1 + \widehat{s}_2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d\widehat{s}_1}{dt} + \frac{d\widehat{s}_2}{dt} \Rightarrow u_{cm} = u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} \quad (1)$$

2^{ος} Τρόπος

Όλα τα σημεία του νήματος άρα και τα **A** και **Γ** έχουν την ίδια ταχύτητα. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στις τροχαλίες τα σημεία **A** και **Γ** έχουν τις ίδιες ταχύτητες με τα σημεία επαφής τους στις τροχαλίες: $u_A = u_\Gamma \Rightarrow u_{\varepsilon_1} = u_{cm} - u_{\varepsilon_2} \Rightarrow u_{cm} = u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} \quad (1)$

β. 1^{ος} Τρόπος

Παραγωγίζουμε τη σχέση (1) ως προς το χρόνο: $\frac{du_{cm}}{dt} = \frac{du_{\varepsilon_1}}{dt} + \frac{du_{\varepsilon_2}}{dt} \Rightarrow a_{cm} = a_{\varepsilon_1} + a_{\varepsilon_2} \quad (2)$

όπου: a_{cm} = η επιτάχυνση του κέντρου μάζας K_2 , a_{ε_1} = η επιτρόχιος επιτάχυνση των

σημείων της περιφέρειας της σταθερής τροχαλίας, άρα και του σημείου **A**,

a_{ε_2} = η επιτρόχιος επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της ελεύθερης τροχαλίας,

άρα και του σημείου **Γ**.

2^{ος} Τρόπος

Όλα τα σημεία του νήματος άρα και τα **A** και **Γ** έχουν την ίδια επιτάχυνση. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στις τροχαλίες τα σημεία **A** και **Γ** έχουν τις ίδιες επιταχύνσεις με τα σημεία επαφής τους στις τροχαλίες: $a_A = a_\Gamma \Rightarrow a_{\varepsilon_1} = a_{cm} - a_{\varepsilon_2} \Rightarrow a_{cm} = a_{\varepsilon_1} + a_{\varepsilon_2} \quad (2)$

γ. Στο νήμα ασκούνται οι δυνάμεις \vec{T}'_1 και \vec{T}'_2 από τις τροχαλίες. Οι αντιδράσεις τους

\vec{T}_1 και \vec{T}_2 ασκούνται από το νήμα στις τροχαλίες κέντρων K_1 και K_2 αντίστοιχα. Δηλαδή

$\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1 \quad (1)$ και $\vec{T}'_2 = -\vec{T}_2 \quad (2)$. Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (Θ.Ν.Μ) για το

αμελητέας μάζας νήμα: $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T}'_1 = -\vec{T}'_2 \Rightarrow T'_1 = T'_2 \stackrel{(7)}{\Rightarrow} T_1 = T_2 = T \quad (3)$

Θεωρούμε ως θετικού μέτρου τις ροπές που έχουν τη φορά περιστροφής των τροχαλιών.

Από τον Θ.Ν.Μ για την στροφική κίνηση της σταθερής τροχαλίας:

$$\Sigma \tau_{(K_1)} = I_{(K_1)} a_{\gamma\omega v_1} \Rightarrow T_1 R = \frac{1}{2} M R^2 a_{\gamma\omega v_1} \Rightarrow a_{\gamma\omega v_1} = \frac{2T_1}{MR} \quad (4)$$

Από τον Θ.Ν.Μ για την στροφική κίνηση της ελεύθερης τροχαλίας:

$$\Sigma \tau_{(K_2)} = I_{(K_2)} a_{\gamma\omega v_2} \Rightarrow T_2 R = \frac{1}{2} M R^2 a_{\gamma\omega v_2} \Rightarrow a_{\gamma\omega v_2} = \frac{2T_2}{MR} \quad (5)$$

$$\text{Από (3),(4),(5): } a_{\gamma\omega v_1} = a_{\gamma\omega v_2} = \frac{2T}{MR} \quad (6)$$

Για τις στροφικές κινήσεις των τροχαλιών ισχύει: $a_{\varepsilon_1} = a_{\gamma\omega v_1} R$ και $a_{\varepsilon_2} = a_{\gamma\omega v_2} R$ και

$$\text{λόγω της (6): } a_{\varepsilon_1} = a_{\varepsilon_2} = \frac{2T}{M} \quad (7).$$

$$\text{Από (2)} \xrightarrow{(7)} a_{cm} = 2a_{\varepsilon_1} = 2a_{\varepsilon_2} \quad (8)$$

Από τον Θ.Ν.Μ για τη μεταφορική κίνηση της ελεύθερης τροχαλίας: $\Sigma \vec{F} = M \vec{a}_{cm} \Rightarrow$

$$W_2 - T_2 = M a_{cm} \xrightarrow{(3),(7)} Mg - \frac{Ma_{\varepsilon_2}}{2} = M a_{cm} \xrightarrow{(8)} a_{\varepsilon_2} = \frac{2g}{5} \Rightarrow a_{\varepsilon_2} = 4 \frac{m}{s^2} \quad (9)$$

$$\text{Άρα } a_{\gamma\omega v_1} = a_{\gamma\omega v_2} = \frac{a_{\varepsilon_2}}{R} \xrightarrow{(9)} a_{\gamma\omega v_1} = a_{\gamma\omega v_2} = 50 \frac{\text{rad}}{s^2} \quad (10).$$

$$\delta. \text{Από (8) και (9): } a_{cm} = 8 \frac{m}{s^2}.$$

$$\varepsilon. \text{Από (6): } T = \frac{MR a_{\gamma\omega v_2}}{2} \xrightarrow{(10)} T = 16N.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να δοθεί με δύο τροχαλίες διαφορετικών ακτίνων ($R_1 \neq R_2$). Οι σχέσεις $x = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$, $u_{cm} = u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2}$, $a_{cm} = a_{\varepsilon_1} + a_{\varepsilon_2}$ ισχύουν διότι οι συνθήκες κίνησης των

δύο τροχαλιών δεν αλλάζουν. Επειδή όμως $a_{\varepsilon_1} = a_{\gamma\omega v_1} R_1$ και $a_{\varepsilon_2} = a_{\gamma\omega v_2} R_2$, η σχέση

$$a_{cm} = a_{\varepsilon_1} + a_{\varepsilon_2} \text{ γράφεται: } a_{cm} = a_{\gamma\omega v_1} R_1 + a_{\gamma\omega v_2} R_2.$$

Ξ.ΣΤΕΡΓΙΑΔΗΣ

x.s.stergiadis@gmail.com