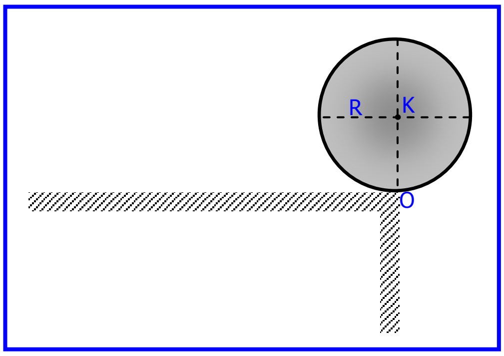
## Εφαρμογές στη δυναμική του κέντρου μάζας στερεού σώματος

### Εφαρμογή 1η



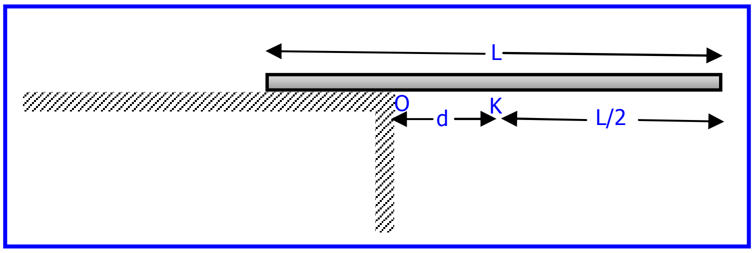

Ομογενής δίσκος ακτίνας R ηρεμεί στην άκρη λείου οριζόντιου τραπεζιού με το κέντρο του K να βρίσκεται στην κατακόρυφη που διέρχεται από την γωνία O του τραπεζιού. Δίνουμε στο δίσκο μια αμελητέα αρχική ταχύτητα και αυτός αρχίζει να στρέφεται περί το O χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:

**α.** τη γωνία κατά την οποία έχει στραφεί ο δίσκος μέχρι τη στιγμή που εγκαταλείπει το τραπέζι

**β.** τη γωνιακή ταχύτητα, την κεντρομόλο επιτάχυνση και την επιτρόχιο επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου και την γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, αμέσως μετά την εγκατάλειψη του τραπεζιού.

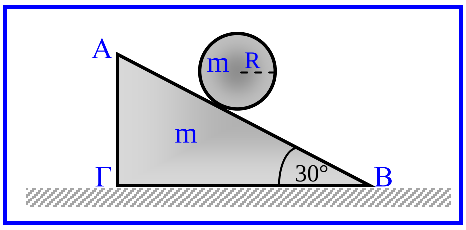
Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα. Δίνονται η ακτίνα του δίσκου R και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος σε αυτόν $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

### Εφαρμογή 2η




Η ομογενής ράβδος μήκους L του σχήματος είναι τοποθετημένη πάνω σε τραπέζι έτσι ώστε, το κέντρο μάζας της K να απέχει από το άκρο O του τραπεζιού απόσταση d. Η ράβδος συγκρατείται σε οριζόντια θέση και κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερη οπότε αρχίζει να στρέφεται γύρω από την άκρη O του τραπεζιού. Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ της ράβδου και του άκρου O του τραπεζιού είναι $\mu_{στ,ορ}=\mu$, να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την αρχική οριζόντια διεύθυνσή της , όταν αρχίζει να ολισθαίνει. Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$.

### Εφαρμογή 3η




Το τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ γωνίας $\hat{B} = 30°$ και μάζας m έχει τοποθετηθεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και ο ομογενής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R κυλίεται προς τα κάτω κατά μήκος της έδρας ΑΒ του πρίσματος.

**α.** Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση κίνησης του πρίσματος ως προς το δάπεδο.

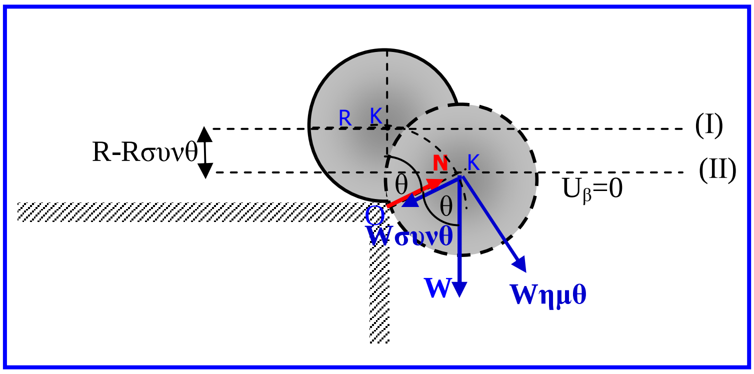
**(Το επόμενο ερώτημα απευθύνεται προς τους διδάσκοντες)**

**β.** Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του πρίσματος.

Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος σε αυτόν $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

## Απαντήσεις

### Εφαρμογή 1η




**α.** Ο δίσκος μέχρι να εγκαταλείψει το τραπέζι στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Ο. Από τον ορισμό του κέντρου μάζας και για την κυκλική κίνηση ακτίνας R που αυτό εκτελεί γύρω από το Ο έχουμε:

Στη διεύθυνση της ακτίνας ΟΚ:

$$W\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} - N = \frac{m\upsilon_{cm}^2}{R} \Rightarrow$$

$$mg\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} - N = m\omega^2 R .$$

Τη χρονική στιγμή που ο δίσκος χάνει την επαφή του με το τραπέζι, N=0 και $\omega^2 R = g\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}$ **(1)**

Στη διεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο Κ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το κέντρο μάζας Κ:

$$W\eta\mu\hat{\theta} = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow mg\eta\mu\hat{\theta} = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow \alpha_\varepsilon = g\eta\mu\hat{\theta} \quad \textbf{(2)}$$

Στο δίσκο ασκούνται η συντηρητική δύναμη του βάρους W και η δύναμη Ν από το τραπέζι που έχει διαρκώς τη διεύθυνση της ακτίνας ΚΟ και δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, άρα η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Αν θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια του δίσκου είναι μηδέν, όταν το κέντρο μάζας Κ βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο στη θέση εγκατάλειψης του τραπεζιού (ΙΙ):

$$E_{M(I)} = E_{M(II)} \Rightarrow mg(R - R\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}) = \frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2 \overset{(\Theta.Steiner)}{\Rightarrow} mgR(1-\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\omega^2$$

$$\Rightarrow Rg(1-\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}) = \frac{3}{4}R^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 R = \frac{4}{3}g(1-\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}) \quad \textbf{(3)}$$

Από **(1)** και **(3)**: $g\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} = \frac{4}{3}g(1-\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}) \Rightarrow 3\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} = 4 - 4\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\theta} = \frac{4}{7}$ **(4)**

**β.** Από **(3)** και **(4)**: $\omega^2 R = \frac{4}{3}g\left(1-\frac{4}{7}\right) \Rightarrow \omega^2 = \frac{4g}{7R} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{g}{7R}}$ .

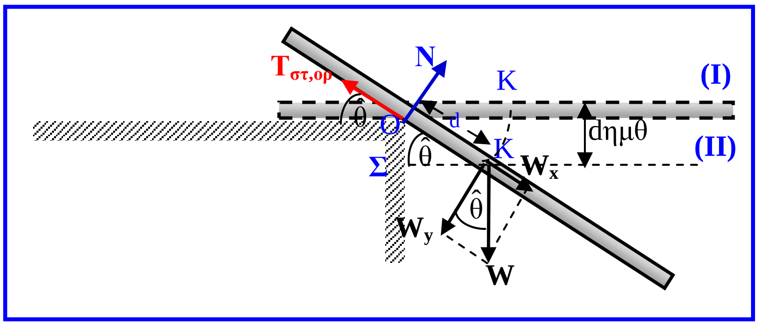
$$a_\kappa = \omega^2 R \overset{(3)}{\Rightarrow} a_\kappa = \frac{4g}{7} .$$

$$\eta\mu\theta = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} \overset{(4)}{\Rightarrow} \eta\mu\theta = \sqrt{1-\frac{16}{49}} \Rightarrow \eta\mu\theta = \sqrt{\frac{33}{49}} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{33}}{7} \quad \textbf{(5)}$$

Από **(2)** και **(5)**: $\alpha_\varepsilon = g\frac{\sqrt{33}}{7}$ .

Ο δίσκος μετά την εγκατάλειψη του τραπεζιού εκτελεί σύνθετη κίνηση. Οι προηγούμενες τιμές των $a_\kappa$ και $\alpha_\varepsilon$ σχετίζονται με την καμπυλόγραμμη μεταφορική που εκτελεί ο δίσκος ο οποίος ταυτόχρονα θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7R}}$ καθόσον $\Sigma\tau_{(\kappa)}=0$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$.

## Εφαρμογή 2η




Η ράβδος στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Ο κατά γωνία $\hat{\theta}$ μέχρι να αρχίσει η ολίσθησή της. Από τον ορισμό του κέντρου μάζας και για την κυκλική κίνηση ακτίνας d που αυτό εκτελεί γύρω από το Ο έχουμε,

στη διεύθυνση της ακτίνας ΟΚ:

$$T_{\sigma\tau,o\rho} - W_x = m a_{\kappa,cm} \Rightarrow$$

$$\mu N - mg\eta\mu\hat{\theta} = m\omega^2 d \quad \textbf{(1)},$$

στη διεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο Κ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το κέντρο μάζας Κ:

$$W_y - N = m a_\varepsilon \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} - N = m a_\varepsilon \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} - N = m\alpha_{\gamma\omega\nu} d \quad \textbf{(2)}$$

Όπου, $a_{\kappa,cm}$= η κεντρομόλος επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ της ράβδου, $a_\varepsilon$ = η επιτρόχιος επιτάχυνση του κέντρου μάζας της ράβδου και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ = η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(o)} = I_{(o)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \underset{(K\Sigma)=d\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}}{\overset{(\Theta.\mathrm{Steiner})}{\Rightarrow}} mgd\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} = (\frac{1}{12}mL^2 + md^2)\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{12gd\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}}{L^2 + 12d^2} \quad \textbf{(3)}$$

Μέχρι να αρχίσει η ολίσθηση της ράβδου σ' αυτήν ασκούνται η συντηρητική δύναμη του βάρους W, η στατική τριβή $T_{\sigma\tau}$ η οποία δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της και η δύναμη Ν από το τραπέζι που έχει διαρκώς τη διεύθυνση της ακτίνας ΟΚ και δεν εκτελεί έργο, άρα η μηχανική ενέργεια της ράβδου μέχρι αυτή να αρχίσει την ολίσθησή της διατηρείται. Αν θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι μηδέν, όταν το κέντρο μάζας Κ βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο στη θέση εγκατάλειψης του τραπεζιού (ΙΙ):

$$E_{M(I)} = E_{M(II)} \Rightarrow mgd\eta\mu\hat{\theta} = \frac{1}{2}(\frac{1}{12}mL^2 + md^2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{24gd\eta\mu\hat{\theta}}{L^2 + 12d^2} \quad \textbf{(4)}$$

Από **(1)** και **(4)**: $\mu N - mg\eta\mu\hat{\theta} = md\dfrac{24gd\eta\mu\hat{\theta}}{L^2+12d^2} \Rightarrow N = \dfrac{mg\eta\mu\hat{\theta}}{\mu} + \dfrac{md}{\mu}(\dfrac{24gd\eta\mu\hat{\theta}}{L^2+12d^2}) \quad \textbf{(5)}$

Από **(2)** και **(5)**:

$$mg\sigma\upsilon\nu\hat{\theta} - \frac{mg\eta\mu\hat{\theta}}{\mu} - \frac{md}{\mu}(\frac{24gd\eta\mu\hat{\theta}}{L^2+12d^2}) = m\alpha_{\gamma\omega\nu}d \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{g\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}}{d} - \frac{g\eta\mu\hat{\theta}}{\mu d} - \frac{1}{\mu}(\frac{24gd\eta\mu\hat{\theta}}{L^2+12d^2}) \quad \textbf{(6)}$$

Από **(3)** και **(6)**:

$$\frac{12gd\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}}{L^2+12d^2} = \frac{g\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}}{d} - \frac{g\eta\mu\hat{\theta}}{\mu d} - \frac{1}{\mu}(\frac{24gd\eta\mu\hat{\theta}}{L^2+12d^2}) \Rightarrow \left(\frac{24d}{\mu(L^2+12d^2)} + \frac{1}{\mu d}\right)\eta\mu\hat{\theta} = (\frac{1}{d} - \frac{12d}{L^2+12d^2})\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}$$

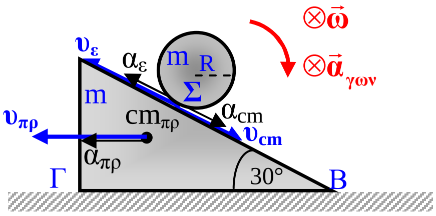
$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\theta} = \frac{\frac{1}{d} - \frac{12d}{L^2+12d^2}}{\frac{24d}{\mu(L^2+12d^2)} + \frac{1}{\mu d}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\theta} = \frac{\frac{L^2+12d^2-12d^2}{d(L^2+12d^2)}}{\frac{24d^2+L^2+12d^2}{\mu d(L^2+12d^2)}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\theta} = \frac{\mu L^2}{L^2+36d^2}.$$

### Παρατήρηση

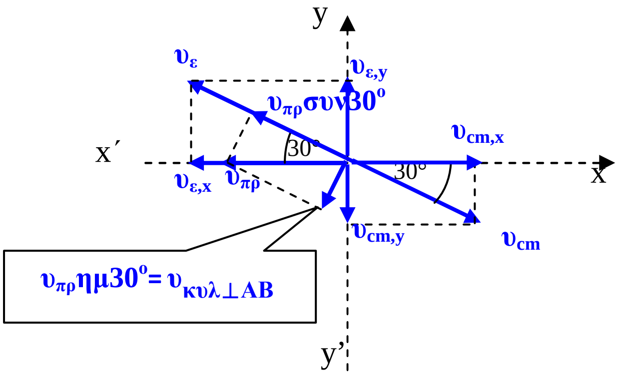
Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι αν d=0, δηλαδή το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται στην άκρη Ο του τραπεζιού, τότε $\varepsilon\varphi\hat{\theta} = \mu$ και η γωνία $\hat{\theta}$ είναι η **γωνία τριβής** για την οποία επίκειται ολίσθηση της ράβδου ως προς το τραπέζι. Η ράβδος τότε δεν στρέφεται διότι $\Sigma\tau_{(O)}$=0.

## Εφαρμογή 3η

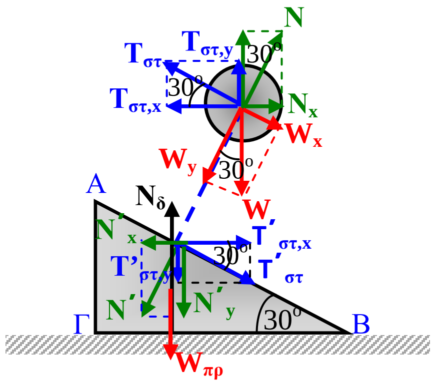
**α.** Στην οριζόντια διεύθυνση $xx'$ κίνησης του πρίσματος το σύστημα «κύλινδρος –πρίσμα» είναι μονωμένο διότι οι δυνάμεις $\vec{T}_{\sigma\tau}$ και $\vec{T}'_{\sigma\tau}$, $\vec{N}$ και $\vec{N}'$ έχουν σχέση δράσης - αντίδρασης, δηλαδή είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος, άρα η ορμή του συστήματος ως προς τον ακίνητο παρατηρητή διατηρείται:




**Σχήμα 1**




**Σχήμα 2**




**Σχήμα 3**

$\vec p_{κυλ,xx'} + \vec p_{πρ} = 0 \Rightarrow \vec p_{πρ} = -\vec p_{κυλ,xx'} \Rightarrow m\vec υ_{πρ} = -m\vec υ_{κυλ,xx'} \Rightarrow \vec υ_{πρ} = -\vec υ_{κυλ,xx'}$, όπου $\vec υ_{κυλ,xx'}$=η συνιστώσα της ταχύτητας του κυλίνδρου στην οριζόντια διεύθυνση $xx'$ κίνησης του πρίσματος, αλλά ο κύλινδρος κατεβαίνει σε σχέση με την έδρα AB του πρίσματος, δηλαδή η $\vec υ_{κυλ,xx'}$ έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, άρα το πρίσμα κινείται προς τα αριστερά. **(Σχήμα 1)**

**β.** Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται πάνω στην έδρα AB του πρίσματος θα πρέπει το σημείο Σ **(Σχήμα 1)** κάθε χρονική στιγμή να έχει την ίδια ταχύτητα με την συνιστώσα της οριζόντιας ταχύτητας του πρίσματος $υ_{πρ}$ στην διεύθυνση της έδρας AB του πρίσματος : $υ_{πρ}συν30^{\circ} = υ_ε - υ_{cm}$ **(Σχήμα 2)**.

Με παραγώγιση της τελευταίας σχέσης έχουμε: $\dfrac{dυ_{πρ}}{dt}συν30^o = \dfrac{dυ_ε}{dt} - \dfrac{dυ_{cm}}{dt} \Rightarrow a_{πρ}συν30^o = a_ε - a_{cm}$ **(1)**

Σύμφωνα με το **(Σχήμα 3)**,από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου: $T_{στ}$

$$W_x - T_{στ} = ma_{cm} \Rightarrow mgημ30^o - T_{στ} = ma_{cm} \Rightarrow T_{στ} = \frac{mg}{2} - ma_{cm} \quad \textbf{(2)}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου:

$$T_{στ}R = \frac{1}{2}mR^2α_{γων} \Rightarrow T_{στ} = \frac{1}{2}ma_ε \quad \textbf{(3)}$$

Από τις **(2)** και **(3)** : $ma_ε = mg - 2ma_{cm} \Rightarrow a_ε = g - 2a_{cm}$ **(4)**

Από τις **(1)** και **(4)** : $a_{πρ}συν30^o = g - 2a_{cm} - a_{cm} \Rightarrow a_{πρ}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = g - 3a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \dfrac{g}{3} - a_{πρ}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **(5)**

Για να διατηρείται η επαφή κυλίνδρου – πρίσματος στη διεύθυνση που είναι κάθετη προς την έδρα AB του πρίσματος, πρέπει η ταχύτητα του κυλίνδρου $υ_{κυλ\perp AB}$ ,να είναι ίση με τη συνιστώσα της ταχύτητας του πρίσματος στην ίδια διεύθυνση $υ_{κυλ\perp AB} = υ_{πρ}ημ30^o$, με παραγώγιση της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$\frac{dυ_{κυλ\perp AB}}{dt} = \frac{dυ_{πρ}ημ30^o}{dt} \Rightarrow a_{κυλ\perp AB} = a_{πρ}ημ30^o \; \textbf{(6)}.$$

Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τον κύλινδρο στην ίδια διεύθυνση δίνει:

$$W_y - N = ma_{κυλ\perp AB} \overset{(6)}{\Rightarrow} mgσυν30^o - N = ma_{πρ}ημ30^o \Rightarrow N = mgσυν30^o - ma_{πρ}ημ30^o \; \textbf{(7)}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του κέντρου μάζας του πρίσματος στην οριζόντια διεύθυνση $xx'$ **(Σχήμα 3)**: $N'_x - T'_{στ,x} = ma_{πρ} \Rightarrow N'ημ30^o - T'_{στ}συν30^o = ma_{πρ} \underset{N'=N}{\overset{T'_{στ}=T_{στ}}{\Rightarrow}}$

$$Nημ30^o - T_{στ}συν30^o = ma_{πρ} \underset{(7)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} mgσυν30^oημ30^o - ma_{πρ}ημ^2 30^o - \left(\frac{mg}{2} - ma_{cm}\right)συν30^o = ma_{πρ}$$

$$\Rightarrow \frac{mg\sqrt{3}}{4}-\frac{ma_{\pi\rho}}{4}-\frac{mg\sqrt{3}}{4}+ma_{cm}\frac{\sqrt{3}}{2}=ma_{\pi\rho}\overset{(5)}{\Rightarrow}\left(\frac{g}{3}-a_{\pi\rho}\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5a_{\pi\rho}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{g\sqrt{3}}{6}-a_{\pi\rho}\frac{3}{12}=\frac{5a_{\pi\rho}}{4}\Rightarrow \frac{g\sqrt{3}}{6}=\frac{6a_{\pi\rho}}{4}\Rightarrow a_{\pi\rho}=\frac{g\sqrt{3}}{9}.$$

**Ξ.Στεργιάδης**